(Dienstag, 24.04.18)

Kapitel 3 Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit

Beispiele Funktionen

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 1$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn

$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 = f(A)$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn

$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A = f(A)$

(iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

(wegen dem Satz 3.2)

Aus $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ folgt, dass $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $x, y \in \mathbb{R}$

(für weitere Eigenschaften siehe Blatt 7)

(iv) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 1) \\ 2, & x \in [1, \infty) \end{cases}$ ist an der Stelle $x = 1$ unstetig, denn,

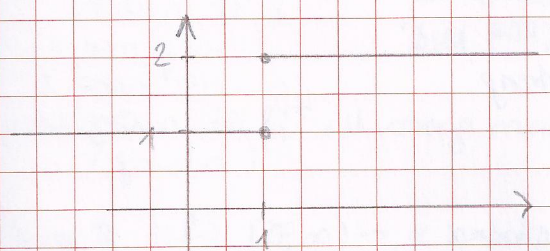
$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R}:$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underbrace{A}_{=1} \wedge \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(\underbrace{A}_{1})$

$\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$

$\neg(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(A))$

$\Leftrightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \wedge \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(A))$



Wähle $(a_n = 1 - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}: a_n \in \mathbb{R}: \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \wedge$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(1 - \frac{1}{n}) = 1 \neq f(1) = 2$

(v) 3.3 Satz: f, g stetig auf $D \Rightarrow f+g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}\ (g \neq 0)$ stetig auf D

(vi) 3.4. Satz: $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\underbrace{g(D) \subseteq D}$

stetig auf D. Bild von D unter g ist eine Teilmenge von D.

$\underbrace{(f \circ g)}_{\text{Verkettung}} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, stetig auf D.

(Beweis wie bei Satz 3.3)

z.B. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$, ist stetig auf $\mathbb{R}$,

denn $f = (f_1 \circ f_2)(x) = \underbrace{f_1(\underbrace{f_2(x)}_{2x})}_{e^{2x}}$

und

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 2x$ stetig auf $\mathbb{R}$.

(vii) Def: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

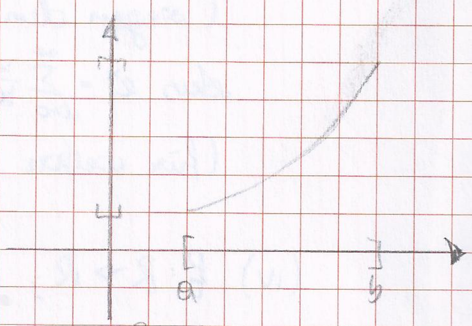
(i) streng monoton wachsend,

falls $\forall_{x_1 < x_2} : f(x_1) < f(x_2)$

(ii) monoton wachsend, falls

$\forall x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$

(analog: monoton fallend, streng monoton fallend)

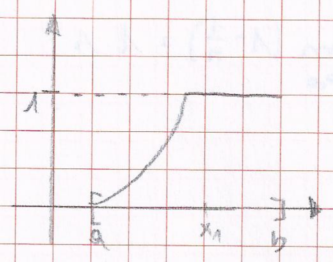


f ist injektiv (streng monoton wachsend)

f ist surjektiv (stetig)

$\Rightarrow$ f ist bijektiv

Bemerkung: • f ist monoton wachsend (nicht streng mon. wachsend)

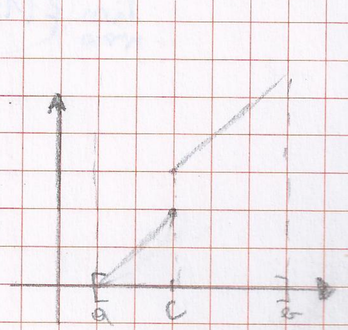


aber nicht injektiv, denn für $x_1 \neq x_2$ $\wedge$ $f(x_1) = f(x_2)$

• f ist unstetig an der Stelle c

$f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to [0, f(b)]$

f ist nicht surjektiv



Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22365-0
F +43 5574/22365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

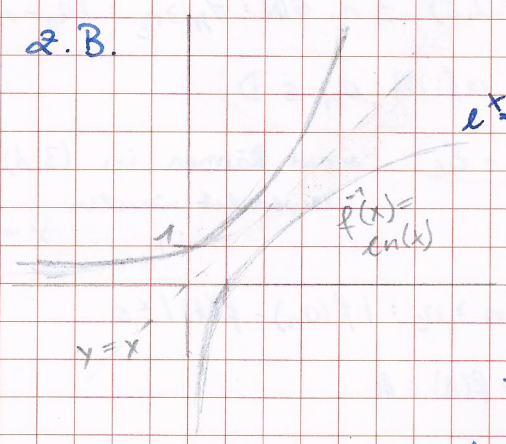
Wegen f streng monoton wachsend (fallend) und stetig $\Rightarrow f$ bijektiv.

3.5 Satz $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig auf $[a,b]$. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}: \underbrace{f([a,b])}_{\text{Bild von } [a,b] \text{ unter } f}$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in [a,b]$$

(f^{-1} ist stetig)

z.B.



$e^x = f(x)$ ist streng monoton wachsend und stetig auf $\mathbb{R}$

Es gilt $e^x < e^y$ für alle $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$

denn $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = e^y$

(S. 35)

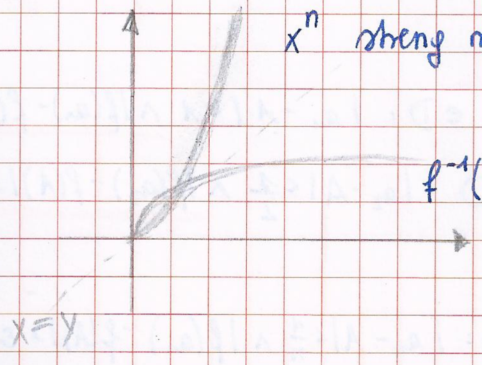
$\Rightarrow$ die Umkehrfunktion (der natürliche Log).

$$f^{-1} = \ln : \underbrace{(0,\infty)}_{\text{Bild } f(\mathbb{R})} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Def. bereich von } f}$$

f^{-1} ist streng monoton wachsend und stetig.

z.B. $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

x^n streng mon. wachsend, stetig auf $[0,\infty)$



$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

$f^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig, streng mon wachsend, auf $[0,\infty)$.

Stetige Funktionen: $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $x \in (0,\infty)$; $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in [0,\infty)$. und alle Produkte, Summen Quotienten, Verkettungen dieser Funktionen

3.2. Satz: ($f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $A \in D$) $\Longleftrightarrow$

$$\left(\forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in D: \lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)\right).$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Falls f stetig an der Stelle $A \in D$ und $\forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$a_n \in D$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, dann $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)$.

Def (3.1) $\forall \varepsilon > 0 \cdot \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D : |x - A| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
f stetig

$$|f(x) - f(A)| < \varepsilon$$

Für dieses ε (Def 2.2) $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - A| < \varepsilon$

Wähle $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, dann erfüllt $a_n \in D$

$|a_n - A| < \varepsilon = \delta_\varepsilon$ und können in (3.1) verwendet werden

(Def. 3.1.) $x = a_n$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |f(a_n) - f(A)| < \varepsilon$

(Def) 2.2) $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A) \in \mathbb{R}$

"$\Leftarrow$" (Widerspruchsbeweis)

Falls $\forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in D : \lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)$, dann ist f stetig an der Stelle $A \in D$.

Annahme: f ist unstetig an der Stelle $A \in D$, d.h.

(Verneinung der Def. 3.1)

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta_\varepsilon > 0 : \exists x \in D : |x - A| < \delta_\varepsilon \wedge |f(x) - f(A)| \geq \varepsilon$$

Da $\delta_\varepsilon > 0$ ist beliebig:

$\delta_\varepsilon = 1$ existiert $a_1 \in D : |a_1 - A| < 1 \wedge |f(a_1) - f(A)| \geq \varepsilon$

$\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert $a_2 \in D : |a_2 - A| < \frac{1}{2} \wedge |f(a_2) - f(A)| \geq \varepsilon$

$\vdots$

$\delta_\varepsilon = \frac{1}{n}$ existiert $a_n \in D : |a_n - A| < \frac{1}{n} \wedge |f(a_n) - f(A)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ für diese Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in D$, $\lim_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$

Voraussetzung
$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

(Widerspruch zu $|f(a_n) - f(A)| \geq \varepsilon$)

Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22 365-0
F +43 5574/22 365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu